15-12-14.

Παράσταση σφάλματος του κανόνα του τραπεζίου.

Λήμμα: Έστω $f \in C^2[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε το σφάλμα $R_2(f) = I(f) - Q_2(f)$ να παριστάνεται ως $R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$

Απόδειξη: Έστω $p_1 \in \mathbb{P}_1$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία a, b, $Q_2(f) = Q_2(p_1) = I(p_1)$

$R_2(f) = I(f) - Q_2(f) = I(f) - I(p_1) = I(f - p_1)$

$R_2(f) = \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx$

$\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi(x) \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2!} f''(\xi(x))(x-a)(x-b).$

$R_2(f) = \int_a^b (f(x) - p_2(x))dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(x-b)dx =$

$-\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))(x-a)(b-x)dx = -\frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \cdot \int_a^b (x-a)(b-x)dx = \circledast$

Έστω $m = \min_{a \le x < b} f''(x)$, $M = \max_{a < x \le b} f''(x)$

$m\int_a^b (x-a)(b-x)dx \le -2R_2(f) \le M\int_a^b (x-a)(b-x)dx$

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

$\exists \xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $-2R_2(f) = f''(\xi) \cdot \int_a^b (x-a)(b-x)dx.$

$\circledast = -\frac{1}{2} f''(\xi) \cdot \int_0^1 (a+sh-a)(a+h-(a+sh))\,d(a+sh) =$

$$= -\frac{1}{2} f''(\xi) h^3 \int_0^1 s(1-s)\,ds = -\frac{h^3}{2} f''(\xi)\left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$ όπου $\boxed{h=b-a}$

<u>Παράσταση σφάλματος του σύνθετου τύπου του τραπεζίου.</u>

Έστω $f\in C^2[a,b]$ και η ομοιόμορφη διαμέριση $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ του διαστήματος $[a,b]$ με $h=\frac{b-a}{n}$. Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$, τέτοιο ώστε το σφάλμα $R^T_{n+1}(f)$ του σύνθετου τύπου του τραπεζίου $Q^T_{n+1}(f)$ να παριστάνεται ως $R^T_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$.

- $R^T_{n+1}(f) = I(f) - Q^T_{n+1}(f) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - Q_2^{(1)}(f) + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - Q_2^{(2)}(f) + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - Q_2^{(n)}(f) = -\frac{(x_1-x_0)^3}{12} f''(\xi_1) - \frac{(x_2-x_1)^3}{12} f''(\xi_2) - \dots - \frac{(x_n-x_{n-1})^3}{12} f''(\xi_n) =$
$= -\frac{h^3}{12}\left(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\dots+f''(\xi_n)\right) = -\frac{h^2}{12} n h \cdot \frac{1}{n}\left(f''(\xi_1)+\dots+f''(\xi_n)\right) =$
$-\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$.

<u>Παράσταση σφάλματος του κανόνα του Simpson.</u>

<u>Λήμμα:</u> Έστω $f\in C^4[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε το σφάλμα $R_3(f)$ του κανόνα του Simpson $Q_3(f)$ να παριστάνεται ως: $R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 180} \cdot f^{(4)}(\xi)$.

Ο κανόνας του Simpson είναι ακριβής για κάθε $p\in\mathbb{P}_2$, αφού προέκυψε από ολοκλήρωση το πολυών. παρεμβολής $p_2(x)$. Παρατηρούμε ότι είναι ακριβής και για την $f(x)=x^3$. Επομένως είναι ακριβής για κάθε $p\in\mathbb{P}_3$, αφού $p(x)=ax^3+q(x)$, $q\in\mathbb{P}_2$.

$$I(x^3) = \int_a^b x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b = \frac{b^4-a^4}{4} = \frac{b-a}{4}\left(b^3+b^2a+ba^2+a^3\right)$$

$$Q_3(x^3) = \frac{h}{3}\left(a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right) = \frac{b-a}{6}\left(a^3+\frac{1}{2}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b^3\right) =$$
$$= \frac{b-a}{6}\cdot\frac{3}{2}\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) = \frac{b-a}{4}\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$$
$$I(x^3) = Q_3(x^3)$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p_3\in\mathbb{P}_3$ ως το πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία $a, \frac{a+b}{2}, b$ ώστε να ισχύει επιπλέον $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = p_3'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Τότε: $(\forall\, x\in[a,b])(\exists\, \xi(x))$:

$f(x)-P_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi(x))\varphi(x)$ όπου $\varphi(x)=(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(t)=f(t)-P_3(t)-\frac{f(x)-P_3(x)}{\varphi(x)}\varphi(t)$
Η ϕ έχει ρίζες τα σημεία $a, \frac{a+b}{2}, b, x$ όπου η $\frac{a+b}{2}$ είναι διπλή ρίζα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle η ϕ' έχει 4 ρίζες στο (a,b), η ϕ'' έχει τρείς, η ϕ''' δυο και η $\phi^{(4)}$ έχει μια ρίζα την $\xi(x)\in(a,b)$.

$$\phi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-P_3^{(4)}(t)-\frac{f(x)-P_3(x)}{\varphi(x)}\varphi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-\frac{f(x)-P_3(x)}{\varphi(x)}\cdot 4!$$
$$0=\phi^{(4)}(\xi(x))=f^{(4)}(\xi(x))-4!\,\frac{f(x)-P_3(x)}{\varphi(x)}\Leftrightarrow f(x)-P_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi(x))\varphi(x)$$

$$R_3(f)=I(f)-Q_3(f)=I(f)-Q_3(P_3)=I(f)-I(P_3)=I(f-P_3)$$
$$R_3(f)=\int_a^b f(x)-P_3(x)\,dx=\frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi(x))\varphi(x)\,dx=-\frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi(x))(x-a)\cdot$$
$$(x-\frac{a+b}{2})^2(b-x)\,dx=-\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\int_a^b(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(b-x)\,dx=\heartsuit$$

$$\int_a^b(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(b-x)\,dx=\int_0^2(a+sh-a)(a+sh-(a+h))^2(a+2h-(a+sh))$$
$$d(a+sh)=h^5\cdot\int_0^2 s(s-1)^2(2-s)\,ds=h^5\cdot\int_0^2(-s^4+4s^3-5s^2+2s)\,ds=$$
$$=h^5\left[-\frac{s^5}{5}+s^4-\frac{5}{3}s^3+s^2\right]_0^2=h^5\left(-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4\right)=$$

$$=h^5\left(-\frac{96}{15}-\frac{200}{15}+\frac{300}{15}\right)=\frac{4}{15}h^5$$

$$\heartsuit=-\frac{4}{24\cdot 15}f^{(4)}(\xi)h^5=-\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^5=-\frac{(b-a)^5}{2^4\cdot 180}f^{(4)}(\xi).$$

Παρατήρηση σφάλματος του σύνθετου τύπου του Simpson

Έστω $f\in C^4[a,b]$ και η ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$: $x_i=a+ih$, $i=0,1,\dots n$, με $h=\frac{b-a}{n}$ και n άρτιος.
Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε το σφάλμα $R^S_{n+1}(f)$ του σύνθετου τύπου $Q^S_{n+1}(f)$ του Simpson να παριστάνεται ως $R^S_{n+1}(f)=$
$=-\frac{(b-a)}{180}h^4f^{(4)}(\xi)$.

$$R^S_{n+1}(f)=\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx-Q_3^{(1)}(f)+\int_{x_2}^{x_4}f(x)dx-Q_3^{(2)}(f)+\dots+\int_{x_{n-2}}^{x_n}f(x)dx-Q_3^{(n/2)}(f)$$
$$=-\frac{1}{2^4\cdot 180}\left((x_2-x_0)^5f^{(4)}(\xi_1)+(x_4-x_2)^5f^{(4)}(\xi_2)+\dots+(x_n-x_{n-2})^5f^{(4)}(\xi_{n/2})\right)=$$

$$= -\frac{2h^5}{180}\left(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_n) + \dots + f^{(4)}(\xi_{n/2})\right) = -\frac{2h^5}{180} \cdot \frac{n}{2}\left[\frac{2}{n}\left(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_n) + \dots + f^{(4)}(\xi_{n/2})\right)\right] = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).$$